Acta Sci. Math., 41 (1979), 47—53

О свойстве перемешивания в смысле А. Реньи для числа положительных сумм

А. А. ДЖАМИРЗАЕВ

1. Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ заданы

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

— последовательность независимых случайных величин (сл. вел.) с $M\xi_i=0$, $D\xi_i=1$ $(i=1, 2, \ldots)$ и $\{\nu_n\}$-последовательность положительных целочисленных сл. вел. Положим $S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $F_k(x)=P\{S_k<x\}$. Через N_k^n обозначим число положительных сумм S_i из последовательности $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n$, где $k=0, 1, \ldots, n-1$. Также положим $N_n=N_0^n$.

Известно [3], что если к последовательности сл. вел. (1) применима центральная предельная теорема, тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_n}{n}<x\right\} = R(x), \tag{2}$$

где

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqq 0, \\ \dfrac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{x} & \text{при} \quad 0 < x \leqq 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

В данной статье доказывается, что последовательность сл. вел. $\left\{\dfrac{N_n}{n}\right\}$ обладает свойством перемешивания в смысле А. Реньи. Применяя этот факт, доказываем закон арксинуса для сумм независимых сл. вел. до случайного индекса.

Прежде чем формулировать результаты, приведем следующее определение из работы А. Реньи [4]. Будем говорить, что последовательность сл. вел. $\{\eta_n\}$, заданная на $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$, обладает свойством перемешивания с пре-

---

Поступило 3. VI. 1977.

дельной функцией распределения (ф. р.) $F(x)$, если для любого события $A\in\mathscr{F}$, где $P(A)>0$,

(3) $$\lim_{n\to\infty} P\{\eta_n < x|A\} = F(x)$$

в каждой точке x, являющейся точкой непрерывности ф. р. $F(x)$.

Теорема 1. *Если к последовательности* (1) *применима центральная предельная теорема, то последовательность сл. вел.* $\left\{\frac{N_n}{n}\right\}$ *обладает свойством перемешивания с предельной ф. р.* $R(x)$.

Теорема 2. *Пусть к* (1) *применима центральная предельная теорема, существует последовательность положительных чисел* $\{k_n\}$ *такая, что* $k_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$ *и*

(4) $$\frac{\nu_n}{k_n}\xrightarrow{P}\nu_0,$$

где ν_0 *положительная сл. вел. Тогда последовательность сл. вел.* $\left\{\frac{N_{\nu_n}}{\nu_n}\right\}$ *обладает свойством перемешивания с предельной ф. р.* $R(x)$.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то при* $n\to\infty$

(5) $$P\left\{\frac{N_{\nu_n}}{k_n}<x\right\}\to\Psi(x)=\int_0^\infty R\left(\frac{x}{y}\right)dA(y),$$

где $A(x)=P\{\nu_0<x\}$.

Отметим, что (5) доказано в работе [1] при условии независимости ν_n от последовательности сл. вел. $\{\xi_n\}$.

2. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

Лемма. *Пусть* $\{\zeta_n\}$ *и* $\{\eta_n\}$ — *две последовательности сл. вел. такие, что* $\zeta_n\xrightarrow{P}0$ *при* $n\to\infty$ *и* $\{\eta_n\}$ *обладает свойством перемешивания с предельной ф. р.* $F_0(x)$. *Тогда* $\{\zeta_n+\eta_n\}$ *обладает свойством перемешивания с предельной ф. р.* $F_0(x)$.

Доказательство леммы является очевидной модификацией доказательства оригинальной леммы Крамера.

3. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся одной теоремой А. Реньи (теорема 2 из [4]), которая утверждает что, если для любого x и при каждом k, $k=1, 2, \ldots$

(6) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_n}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x\right\}=R(x)\cdot P\left\{\frac{N_k}{k}<x\right\},$$

тогда $\left\{\frac{N_n}{n}\right\}$ обладает свойством перемешивания с предельной ф. р. $R(x)$.

Очевидно, что $N_n=N_k+N_k^n$ и при $n\to\infty$ $\frac{N_k}{n}\xrightarrow{P}0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_k^n}{n}<x\right\}=R(x).$$

Теперь, проследив доказательство леммы, нетрудно видеть, что из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_k^n}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x\right\}=R(x)P\left\{\frac{N_k}{k}<x\right\} \tag{7}$$

следует (6). Следовательно, нам достаточно доказать, что при каждом k и для любого x, $0<x\leqq 1$ имеет место (7).

Известно (см. [2], глава V) что

$$P\left\{\frac{N_k^n}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} P\left\{\frac{N_k^n}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x\,\middle|\,S_k=y\right\}dF_k(y), \tag{8}$$

где $P\{A|S_k=y\}$ — значение $P(A|S_k)$ при $S_k=y$ и $P(A|S_k)$ — условная вероятность события A относительно сл. вел. S_k.

Предворительно докажем, что для любого y, $|y|\leqq T$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_k^n(y)}{n}<x\right\}=R(x), \tag{9}$$

где $N_k^n(y)$ — число положительных сумм из последовательности

$$y+\xi_{k+1},\ y+\xi_{k+1}+\xi_{k+2},\ \dots,\ y+\xi_{k+1}+\dots+\xi_n$$

и $T=T(\varepsilon)$ выбрано так, что для любого заданного $\varepsilon>0$

$$\int_{|y|>T} dF_k(y)\leqq\varepsilon. \tag{10}$$

Для удобства записи индексов, введем сл. вел. $\eta_i=\xi_{k+i}$, $i=1, 2, \dots$ и обозначим через M_k^n число положительных сумм из последовательности

$$\eta_k,\ \eta_k+\eta_{k+1},\ \dots,\ \eta_k+\eta_{k+1}+\dots+\eta_n,$$

при $k\leqq n$; при $k>n$ положим $M_k^n=0$. Ясно, что в силу (2), имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_1^n}{n}<x\right\}=R(x). \tag{11}$$

Пусть $\overline{N}_n(y)$ — число положительных сумм из последовательности

$$y+\eta_1,\ y+\eta_1+\eta_2,\ \dots,\ y+\eta_1+\dots+\eta_n.$$

Тогда $N_k^n(y)=\overline{N}_{n-k}(y)$, так как в терминах $\{\eta_i\}$ $N_k^n(y)$ — число положительных сумм из последовательности $y+\eta_1, y+\eta_1+\eta_2, \ldots, y+\eta_1+\ldots+\eta_{n-k}$. Легко проверить, что при фиксированном k

$$\frac{\overline{N}_n(y)-N_k^n(y)}{n}=\frac{\overline{N}_n(y)-\overline{N}_{n-k}(y)}{n}\xrightarrow{P}0, \quad n\to\infty.$$

Поэтому, чтобы показать (9), достаточно доказать, что при $n\to\infty$

$$P\left\{\frac{\overline{N}_n(y)}{n}<x\right\}\to R(x). \tag{12}$$

Отметим сначала, что имеют место следующие неравенства:

а) если $y>0$, то $M_1^n\leqq\overline{N}_n(y)$;

б) если $y\leqq 0$ то $M_1^n\geqq\overline{N}_n(y)$.

Теперь докажем (12) в отдельности для $y>0$ и $y\leqq 0$.

1) Пусть $y>0$. Введем величину $\mu=\mu(y)$ следующим образом:

$$P\{\mu=m\}=P\{y+\eta_1>0, \ldots, y+\eta_1+\ldots+\eta_{m-1}>0, \; y+\eta_1+\ldots+\eta_m\leqq 0\},$$

где $m=1, 2, \ldots$. Воспользовавшись первой теоремой работы [5], легко показать, что для любого y, $0<y\leqq T$, при $m\to\infty$ $P\{\mu=m\}\to 0$ и, следовательно, μ — собственная сл. вел., т. е. $P\{\mu=\infty\}=0$ для любого $y, 0<y\leqq T$. Поэтому, для произвольной последовательности возрастающих к бесконечности чисел m_n имеем, что

$$\frac{\mu}{m_n}\xrightarrow{P}0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{13}$$

Теперь заметим, что в силу определения μ, $y+\eta_1>0$, $y+\eta_1+\eta_2>0, \ldots, y+\eta_1+ +\ldots+\eta_{\mu-1}>0$ и $y+\eta_1+\ldots+\eta_\mu\leqq 0$, откуда при $\mu\leqq n$ имеем, что $\overline{N}_n(y)= =(\mu-1)+\overline{N}_{\mu+1}^n(y)$, где $\overline{N}_k^n(y)$ — число положительных сумм в последовательности

$$y+\eta_1+\ldots+\eta_k, \; y+\eta_1+\ldots+\eta_k+\eta_{k+1}, \ldots, y+\eta_1+\ldots+\eta_n,$$

при $k\leqq n$ и $\overline{N}_k^n(y)=0$ при $k>n$.

При $\mu\leqq n$ будем сравнивать $M_{\mu+1}^n$ и $\overline{N}_{\mu+1}^n(y)$, т. е., соответственно число положительных членов последовательностей $\eta_{\mu+1}, \eta_{\mu+1}+\eta_{\mu+2}, \ldots, \eta_{\mu+1}+\ldots$ $\ldots+\eta_n$ и $y+\eta_1+\ldots+\eta_\mu+\eta_{\mu+1}, \ldots, y+\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_\mu+\eta_{\mu+1}+\ldots+\eta_n$. Тогда, в силу того, что $y+\eta_1+\ldots+\eta_\mu\leqq 0$, имеем

$$\overline{N}_{\mu+1}^n(y)\leqq M_{\mu+1}^n.$$

Итак, если $\mu\leqq n$, то для любого y, $0<y\leqq T$,

$$\overline{N}_n(y)\leqq(\mu-1)+M_{\mu+1}^n. \tag{14}$$

Если же $\mu > n$, то (14) очевидно, так как всегда $\overline{N}_n(y) \leqq n$. Теперь из а) и (14) имеем, что

(15) $$M_1^n \leqq \overline{N}_n(y) \leqq (\mu-1) + M_{\mu+1}^n,$$

откуда для любого x

(16) $$P\left\{\frac{\mu-1}{n} + \frac{M_{\mu+1}^n}{n} < x\right\} \leqq P\left\{\frac{\overline{N}_n(y)}{n} < x\right\} \leqq P\left\{\frac{M_1^n}{n} < x\right\}.$$

В силу определения μ события $\{\mu = m\}$ и $\left\{\frac{M_{m+1}^n}{n} < x\right\}$ независимые. Поэтому

$$P\left\{\frac{M_{\mu+1}^n}{n} < x\right\} = \sum_{m=1}^{\infty} P\left\{\frac{M_{m+1}^n}{n} < x\right\} P\{\mu = m\}.$$

Так как сл. вел. μ независит от n, то для любого заданного $\delta > 0$ и для всех y, $0 < y \leqq T$, можно выбрать целое $T_1 = T_1(\delta)$ так, чтобы $P\{\mu > T_1\} \leqq \delta$. Тогда

(17) $$P\left\{\frac{M_{\mu+1}^n}{n} < x\right\} = \sum_{m=1}^{T_1} P\left\{\frac{M_{m+1}^n}{n} < x\right\} P\{\mu = m\} + P_n,$$

где $P_n < \delta$. Теперь для любого фиксированного T_1 нетрудно проверить, что при $m = 1, 2, \ldots, T_1$

(18) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_{m+1}^n}{n} < x\right\} = R(x).$$

В силу произвольности $\delta > 0$ из (17) и (18) следует, что для любого y, $0 < y \leqq T$,

(19) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_{\mu+1}^n}{n} < x\right\} = R(x).$$

Принимая во внимание (13), из (19) имеем

(20) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu-1}{n} + \frac{M_{\mu+1}^n}{n} < x\right\} = R(x).$$

Из (11), (16) и (20) получаем, что для любого y, $0 < y \leqq T$, имеет место (12) и, следовательно, (9).

2) Пусть $y \leqq 0$. В этом случае величину $\mu = \mu(y)$ введем следующим образом. Для $m = 1, 2, \ldots$ положим

$$P\{\mu = m\} = P\{y + \eta_1 \leqq 0, \ldots, y + \eta_1 + \ldots + \eta_{m-1} \leqq 0,\ y + \eta_1 + \ldots + \eta_m > 0\}.$$

Опять нетрудно проверить, что μ — собственная сл. вел. для каждого y, $-T \leqq$ $\leqq y \leqq 0$. В этом случае вместо неравенства (15) будем имееть, неравенство

$$M_{\mu+1}^n \leqq \overline{N}_n(y) \leqq M_1^n,$$

причем анологично случаю $y>0$, доказывается, что

$$P\left\{\frac{M_{\mu+1}^n}{n}<x\right\}\to R(x), \quad n\to\infty.$$

Далее, тем же способом, что и при $y>0$ получим доказательство (12) и, следовательно, (9) для случая $y\leqq 0$.

Теперь снова вернемся к соотношению (8). Известно [2] (см. глава V, § 3), что подинтегральное выражение (которое мы обозначим через $P_n(x,y)$) в (8) можно написать в следующем виде

$$P_n(x,y)=\lim_{h\to+0}P\left\{\frac{N_k^n}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x|y\leqq S_k<y+h\right\}. \tag{21}$$

Легко видеть, что при условии $\{y\leqq S_k<y+h\}$, $h>0$,

$$N_k^n(y)\leqq N_k^n\leqq N_k^n(y+h).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{N_k^n(y+h)}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x|y\leqq S_k<y+h\right\}\leqq \bar{P}_n\leqq\\ \leqq P\left\{\frac{N_k^n(y)}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x|y\leqq S_k<y+h\right\},\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\bar{P}_n=P\left\{\frac{N_k^n}{n}<x,\ \frac{N_k}{k}<x|y\leqq S_k<y+h\right\}.$$

Используя независимость $N_k^n(y)$ от $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k$, (22) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{N_k^n(y+h)}{n}<x\right\}\cdot P\left\{\frac{N_k}{k}<x|y\leqq S_k<y+h\right\}\leqq \bar{P}_n\leqq\\ \leqq P\left\{\frac{N_k^n(y)}{n}<x\right\}\cdot P\left\{\frac{N_k}{k}<x|y\leqq S_k<y+h\right\}.\end{aligned} \tag{23}$$

В неравенстве (23) переходим к пределу сначала по h, потом по n и интегрируем по y от $-T$ до T. Тогда, при помощи (21), (9) и теоремы Лебега, а также учитывая монотонность $N_k^n(y)$ по y, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}P_n(x,y)\,dF_k(y)=R(x)\int_{-T}^{T}P\left\{\frac{N_k}{k}<x|S_k=y\right\}dF_k(y).$$

Отсюда, принимая во внимание (8) и (10) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_k^n}{n} < x,\ \frac{N_k}{k} < x\right\} = R(x)P\left\{\frac{N_k}{k} < x\right\} + \Delta,$$

где $|\Delta| < 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем (7). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1 и одного результата Ш. Чёргё ([7], теорема 1).

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 2 и одного результата Й. Модьороди ([6], теорема 1) в силу замечания 2 и следствия 1 Ш. Чёргё в [7].

Автор выражает глубокую благодарность проф. Й. Модьороди за ценные советы и внимание оказанное при выполнении настоящей работы.

Литература

[1] М. Гофман, Э. А. Даниелян, К закону арксинуса для сумм независимых случайных величин до случайного индекса, Сб. »*Предельные теоремы для случайных процессов*«, Ташкент, Изд-во »Фан« УзССР (1977).

[2] А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей*, Изд-во »Наука« (Москва, 1974).

[3] P. Erdős and M. Kac, On the number of positive sums of independent random variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 1011—1020.

[4] A. Rényi, On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 215—228.

[5] P. Erdős and M. Kac, On certain limit theorems of the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 292—302.

[6] J. Mogyoródi, A remark on the stable sequences of random variables and limit distribution theorem for the sum of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966), 401—409.

[7] S. Csörgő, On limit distributions of sequences of random variables with random indices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **25** (1974), 227—232.

ТАШКЕНТСКИЙ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ТАШКЕНТ, ГСП